Abstract

Ned följer en simuleringsstudie över ett pensionssystem.

Contents

1. Inledning

I en serie artiklar skall jag behandla ett pensionssystem som på grund av konstruktion blir följsamt mot den allmäna lönenivån men som också innehåller en inflationsskyddande komponent. Denna senare komponent är nödvändig eftersom pensionärer i gemen har mycket svårt, för att inte säga omöjligt, att förändra sin situation efter pensioneringen.

Vanligtvis skiljer man på privata respektive statliga pensionssystem. Med ett privat pensionssystem förstås vanligen ett premiereservsystem där alla pengar som sätts in öronmärks på en individ och förvaltas för denna individ. Med ett statligt system underförstås däremot ett system där årets inbetalningar går direkt ut till årets pensionärer (denna senare typ av pensionssystem kallas i den anglosaxiska litteraturen för '**p**ay–**as**–**y**ou–**go**' system eller mer förkortat 'paygo'). Denna uppdelning är dock lokalt historisk och det finns både historiska och aktuella exempel där omvändningen har gällt. Självklart finns inga teoretiska hinder för att privata pensionsbolag tillämpar ett 'paygo'–system eller att statliga pensionssystem tillämpar ett premiereservsystem.

När det gäller pensionssystem föreligger det en missuppfattning som vi här kort skall beröra – det gäller vem som betalar i ett premiereservsystem repektive i ett 'paygo' system. Låt oss först betrakta ett 'paygo' system: i detta betalar den just nu yrkesverksamma delen av befolkningen pensionärernas uppehälle i form av en pensionsavgift lika för alla. Detta följer ju direkt av definitionen av ett 'paygo' system. I ett premiereservsystem betalas pensionärens uppehälle genom att fonden lösgör tillräckligt med kapital genom att sälja aktier, obligationer eller fastigheter. Någon måste köpa dessa tillgångar och de som har kapital att köpa tillgångar är just de yrkesverksamma. Detta betyder att det är samma kategori människor som står för kostnaderna i båda systemen om än i olika proportioner.

Den stora nackdelen med rena premiereservsystem är deras känslighet mot demografiska och ekonomiska förändringar. Ett par exempel är:

1. När stora kohorter går i pension måste stora belopp lösgöras och därmed kommer marknaden att reagera med lägre priser. Speciellt förstärks denna effekt om de kohorter som under samma tidsperiod inträder i yrkesverksam ålder är små. Det blir därför problem med att garantera värdesäkringen utöver de problem som finns med värdesäkringen av inbetalat belopp under tiden fram till pension.

2. När hög inflation råder blir realräntan negativ och det fonderade kapitalet eroderar bort. I värsta fall blir inflationen så hög att kapitalet helt smälter bort. Men faran för krig och felspekulationer skall ej heller underskattas. Under detta århundrande har dessa två orsaker drivit många pensionsfonder i bankrutt.

Detta betyder inte att jag dömer ut premiereservsystemen som sådana utan endast att min modell förordar ett grundpensionssystem, skött av samhället, av 'paygo'–karaktär.

2. En pensionsmodell

Eftersom pension i sak endast innebär att man sparar för att 'ha på ålderns höst' finns det mängder av möjliga modeller för detta sparande. Jag skall därför först definiera min modell och dess förutsättningar. Förhopningen är att de angivna förutsättningarna ansluter tillräckligt väl till det föreslagna pensionssystemet så att detta arbete även kan komma till direkt nytta.

2.1. Modellens förutsättningar

Den första förutsättningen jag utgår ifrån är att antalet medlemmar i pensionssystemet är stort, mycket stort, och att nya medlemmar hela tiden fylls på. Därmed har jag också uttalat att jag främst tänker på ett statligt pensionssystem men även privata bolag typ SPP kan ha användning av här framlagda tankegångarna.

Den andra förutsättningen är att en medlem i pensionssystemet är garanterad en viss minsta pension som skall täcka det nödvändigaste uppehället i form av hyra, kläder och mat. Vidare skall varje intjänat belopp, under yrkesverksam tid, resultera i en högre pension dock ej över en viss maximipension. Med andra ord skall pensionens storlek ligga mellan två givna gränser – (m_p, M_p)

Den tredje förutsättningen är vad jag kallar solidaritetsprincip 1. På varje intjänad krona utgår en och samma procentsats till pensionssystemet – ingen begränsning. Lite eftertanke ger att utan denna princip kan helt absurda effekter uppstå i form av mycket stora procentsatser på pensionsavgifterna samtidigt som pensionerna blir små.

Den fjärde förutsättningen är att jag skall ej enbart betrakta en avgränsad tid för medlemmarna i pensionssystemet utan inkludera medlemmens hela livstid. Detta betyder att jag även tar hänsyn till kostnaderna under ungdomstiden och således delar in en medlems livstid i tre faser – ungdomsstid, produktionstid (yrkesverksam tid) samt pensionstid. Följande beteckningar införs:

$$\begin{aligned} \text{ungdomstid} &= (0, t_y) \\ \text{produktionstid} &= (t_y, t_w) \\ \text{pensionstid} &= (t_w, \infty) \end{aligned}$$

där det sista intervallet naturligtvis är ändligt, (t_w, t_p), men det förenklar formalismen att låta intervallet vara obegränsat.

Den femte förutsättningen är vad jag kallar solidaritetsprincip 2 och denna består av två delar:

1. Man skall i efterskott kunna betala in till sin pension. Detta för att tex de som går vidare till högre studier inte skall komma i ett sämre läge än de som går ut och arbetar direkt efter skolan.

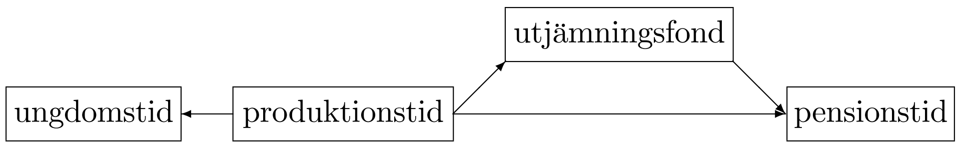
2. Man skall kunna dela med sig av sin pension. Exempel på när detta kan vara tillämpligt är när den ena parten i ett förhållande har liten eller ingen pensionsgrundande inkomst. Men även andra delningar kan tänkas.

Den sjätte förutsättningen är att staten garanterar att utjämningsfonden (se nedan) behåller sitt indexerade värde.

2.2. Grundläggande struktur

Den modell för pensioner jag här skall behandla består av två komponenter. Den första komponenten är ett rent 'paygo' system vilket medför att jag ej behöver studera de problem som uppstår vid pensionens värdesäkrande. Den andra komponenten består av en utjämningsfond, premiereservsystem, vars uppgift är att utjämna mellan kohorter så att en jämn pensionsavgift kan hållas. Denna senare fond är ur ekonomisk synvinkel helt obehövlig i enlighet med vad som tidigare påpekats. Dock menar jag att den behövs av moraliska skäl. Det skall synas att dagens pensionärer har gjort rätt för sig.

Ovanstående innebär att följande betalningsflöden skall studeras



Med följande beteckningar

$$\begin{array}{rcl} W(t) & = & \text{Produktionssumma år } t \\ B(t) & = & \text{Pensionssumma år } t \\ Y(t) & = & \text{Ungdomssumma år } t \\ F(t) & = & \text{Utjämningsfond år } t \end{array}$$

gäller sambandet

$$\alpha_t W(t) + \beta_t F(t) = \gamma_t B(t) + \delta_t Y(t)$$

Här sker urtappning ur fonden när $\beta_t > 0$ och den fylls på när $\beta_t < 0$.

Det direkta flödet från produktionstid mot pensionstid är per definition indexerat. Däremot får utjämningsfonden samma problem som alla andra fonder. I detta skede tänker jag mig att den skall förvaltas enligt följande modell: Om fonden ger ett överskott tillfaller detta överskott staten och omvänt om det blir underskott betalar staten – beräkningar görs på årsbasis. Den indexerade fondens värde skall således direkt spegla inbetalt belopp. I praktiken finns därför en ytterligare utjämningsfond som medför att min modell arbetar i en ränte– och inflationsfri ekonomi. Den enda avkastning en medlem i systemet erhåller är den som är baserad på dödlighetsintensiteten.

Mot denna förvaltningsmodell kan man resa invändningen att ett eventuellt överskott skall tillfalla de enskilda medlemmarna i pensionssystemet. Denna invändning beaktar dock inte att pengar skall skjutas till vid underskott samt att fonden kostar att förvalta. För att uttrycka samma sak i försäkringstermer: Överskott används till driftskostnader och till premien för en Stop Loss försäkring mot dåliga år. Observera att den genomsnittliga realräntan under perioden 1950–1990 ligger på ca 3% och denna skall jämföras med den marknadsmässiga förvaltningskostnaden och Stop Loss premien.

När det gäller pension finns fem variabler för att reglera flödet av pengar till pensionärerna. De första två reglerar utgifterna och de sista tre reglerar inkomsterna:

1. pensionsåldern – t_w. Denna har tidigare använts för att tidigarelägga tidpunkten för pensionering men kan naturligtvis också användas för att senarelägga densamma. Det är här viktigt att individerna ges en reell möjlighet att i tid kompensera sig för en höjning. Tex genom en privat pensionsförsäkring.

2. pensionens storlek. Om medellivslängden ökar kan man minska den utbetalda pensionen och vice versa. Dock skall minimi– och maximipensionen hela tiden behållas intakt. Det är bättre att laborera med vägen däremellan. Pensionens storlek på individnivå kommaer att behandlas i en senare artikel.

3. pensionsavgiftens storlek. Uttaxeringen kan både ökas och minskas. Det är dock för företagens planering bättre om denna kan hållas någorlunda konstant över åren.

4. födelseintensiteten. Riktade bidrag till barnfamiljer ger som effekt fler barn. Denna metod kräver dock ett mycket långsiktigt perspektiv då det tar mer än 20 år innan en individ inträder i produktiv ålder – t_y. På samma sätt erhålls en minskning av antal barn om dessa bidrag tages bort.

5. migration (in– och utvandring). Vi kan ta emot immigranter och av moraliska skäl är det väl endast den riktningen som gäller. Förutom flyktingar som gärna vill återvända hem så fort det är möjligt.

När det gäller pensioner är det olämpligt med stora förändringar i var och en av variablerna ty det kan dels för samhället vara svårt att förutse konsekvenserna och dels för pensionärerna omöjligt att förändra sin situation. Däremot kan små förändringar i var och en av variablerna vara acceptabelt. Tex kan en samtidig höjning av avgiften med 1%, sänkning av pensionen med 2% samt senareläggning av pensionsåldern med ett halvt år upplevas som en rimlig och rättvis börda. Frågor om dylika styrningar kommer att behandlas i en senare artikel.

3. Demografisk modell

Inför följande beteckningar

$$\begin{aligned}
N_k(t,x) &= \text{antal individer vid år } t\text{:s början, kohort } k\text{, åldersgrupp } x. \\
D_k(t,x) &= \text{antal döda under år } t\text{, kohort } k\text{, åldersgrupp } x. \\
U_k(t,x) &= \text{antal nettoinvandrare under år } t \text{ till åldersgrupp } x. \\
B_k(t,x) &= \text{antal levande födda under år } t\text{, av åldersgrupp } x.
\end{aligned}$$

Mellan variablerna k, t och x föreligger sambandet $k = t - x$ och vi kommer ofta undertrycka variabeln k.

En kohortprocess kan nu skrivas[1]

$$N_k = \{N_k(t,x) \,|x \in \mathcal{N}\}$$

och populationsprocessen

$$N(t) = \{N(t,x) \,|x \in \mathcal{N}\}$$

Den totala population i början av år t kan således tecknas

$$N_T(t) = \sum_{x=0}^{\infty} N(t,x)$$

Följande differensekvation och begynelsevillkor gäller

$$\begin{aligned}
N(t+1, x+1) &= N(t,x) - D(t,x) + U(t,x), \quad x \in \mathcal{Z}^+ \\
N(t+1, 0) &= \sum_{x=0}^{\infty} B(t,x) + U(t,0) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} D(k+x, x) - \sum_{x=0}^{\infty} U(t,x)
\end{aligned}$$

[1] $\mathcal{N} = 0, 1, 2, 3, \ldots$
$\mathcal{Z}^+ = 1, 2, 3, \ldots$
$\mathcal{Z} = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

Den sista likheten följer av att antalet döda över en kohorts livstid måste vara detsamma som antalet födda till kohorten med korrigering för migration.

Kohortprocessernas utveckling, givet den ursprungliga storleken $N(k,0)$, antages uppträda som oberoende stokastiska processer. Däremot beror den obetingade kohorten på samtliga föregående kohorter. Men detta beroende sker endast genom kohortens ursprungliga storlek. Variabeln $U_k(t,x)$ beskriver skillnaden mellan immigration och emigration och dess värdeförråd är således de hela talen $\mathcal{Z}$. Notera att migrationen under året fördelar sig över flera kohorter och således att migrationen till en kohort fördelar sig över kohortens livstid. De öviga variablernas värdeförråd är $\mathcal{N}$. När vi vill särskilja mellan könen anger vi detta med ett 'superscript' m eller f. Vi definerar

$$\begin{aligned}
T_k(x) &= \text{återstående livslängd för en individ ur kohort } k, \\
&\quad\ \text{åldersgrupp } x. \\
G_k(t,x) &= P(T_k(x) \le t | T_k(x) > 0) \\
q_k(x) &= \text{dödssannolikheten för en individ ur kohort } k, \\
&\quad\ \text{åldersgrupp } x. \\
&= P(T_k(x) \le 1 | T_k(x) > 0) \\
&= G_k(1,x) \\
\beta_k(x) &= \text{födelsesannolikheten hos en individ ur kohort } k, \\
&\quad\ \text{åldersgrupp } x.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Med dessa beteckningar gäller att

$$\begin{aligned}
D_k(t,x) &\in Bin(N_k(t,x), q_k(x)) \\
B_k(t,x) &\in Bin(N_k(t,x), \beta_k(x))
\end{aligned}$$

och eftersom $N(t,x)$ i vår tillämpning kommer att vara stort gäller enligt DeMoivres sats, se [**?**], att vi kan approximera med en normalfördelning. Således har vi att

$$\begin{aligned}
D_k(t,x) &\sim N(N_k(t,x)\, q_k(x), V_k^q(t,x)) \\
V_k^q(t,x) &= N_k(t,x)\, q_k(x)(1-q_k(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_k(t,x) &\sim N\left(N_k(t,x)\, \beta_k(x), V_k^\beta(t,x)\right) \\
V_k^\beta(t,x) &= N_k(t,x)\, \beta_k(x)(1-\beta_k(x))
\end{aligned}$$

Det totala antalet döda och födda under ett givet år t kan skrivas

$$\begin{aligned} D_T(t) &= \sum_{x=0}^{\infty} D(t,x) \\ B_T(t) &= \sum_{x=0}^{\infty} B(t,x) \end{aligned}$$

Betingat av

$$\mathbf{N}_k = \{N_k(k,0) \,|x \in \mathcal{N}\}$$

betraktas kohorterna som oberoende stokastiska processer och därav följer att $\{D(t,x)\,|\mathbf{N}_k\}_x$ och $\{B(t,x)\,|\mathbf{N}_k\}_x$ är oberoende stokastiska processer. Detta förutsätter att inte någon plötslig katastrof inträffar som påverkar befolkningen som helhet.

Härav följer att antal döda respektive födda under år t uppfyller

$$\begin{aligned} D_T(t)\,|\mathbf{N}_k &\sim N\left(\sum_{x=0}^{\infty} N_{t-x}(t,x)\, q_{t-x}(x), \sum_{x=0}^{\infty} V_{t-x}^{q}(t,x)\right) \\ B_T(t)\,|\mathbf{N}_k &\sim N\left(\sum_{x=0}^{\infty} N_{t-x}(t,x)\, \beta_{t-x}(x), \sum_{x=0}^{\infty} V_{t-x}^{\beta}(t,x)\right) \end{aligned}$$

Observera att för vissa åldersgrupper är $\beta_k(x) = 0$ och $q_k(x) = 1$ varför summorna ovan är ändliga. I en första approximation skall vi antaga ett slutet system utan in– och utvandring. Under detta antagande ger ekvation 3.1 att

$$\begin{aligned} N(t+1,0)\,|\mathbf{N}(t) &\sim N\left(\sum_{x=0}^{\infty} N_{t-x}(t,x)\, \beta_{t-x}(x), \sum_{x=0}^{\infty} V_{t-x}^{\beta}(t,x)\right) \\ N(t+1,x+1)\,|\mathbf{N}(t) &\sim N\left(N_{t-x}(t,x)\left(1-q_{t-x}(x)\right), V_{t-x}^{q}(t,x)\right), \\ & \quad x = 0,1,\ldots \end{aligned}$$

vilket även kan skrivas

$$\mathbf{N}(t+1)\,|\mathbf{N}(t) \sim N\left(\mathbb{A}(t)\,\mathbf{N}(t), \mathbb{V}(t)\right)$$

där

$$\mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} \beta_t(0) & \beta_{t-1}(1) & \beta_{t-2}(2) & \cdots \\ 1-q_t(0) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1-q_{t-1}(1) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1-q_{t-2}(2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbb{V}(t) = \begin{pmatrix} \sum_{x=0}^{\infty} V_{t-x}^{\beta}(t,x) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & V_t^q(t,0) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & V_{t-1}^q(t,1) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Vi kan nu enkelt simulera en populations förändringar i tiden genom att, för olika val av $\mathbf{q}_k$ och $\boldsymbol{\beta}_k$, dra normalfördelade slumptal med väntevärde 0 och standardavvikelse 1, $\mathbf{N}(0,1)$, samt transformera dessa enligt

$$\mathbf{N}(t+1)\,|\mathbf{N}(t) = \mathbb{A}(t)\,\mathbf{N}(t) + \sqrt{\mathbb{V}(t)}\mathbf{N}(0,1)$$

För båda matriserna gäller att de är kvadratiska och ändliga samt att $\mathbb{A}(t)$ ej är av full rang. Det senare följer av att de första och sista parametrarna i $\{\beta_k(x)\,|x \in \mathcal{N}\}$ är 0 varav sista kolumnen blir en noll–kolumn.

4. Utjämningsfondens storlek – en simuleringsstudie

Om populationen alltid hade en jämn och pyramidformad struktur skulle inga problem med pensionärernas försörjning föreligga. Nu finns ingen jämn pyramidformad struktur utan istället förekommer en eller flera midjor i befolkningspyramiden. Dessa midjor härör från att födelseintensiteten inte är konstant utan uppvisar svängningar – se 4.1. Svängningar som ofta har sina förklaringar i befolkningsmässiga pendlingar mellan optimism respektive pessimism om framtiden. Men även samhällets införande respektive borttagande av riktade bidrag till barnfamiljer påverkar dem.

I detta avsnitt skall jag under antagandet om ett slutet system (ingen migration) modellera födelsesannolikheterna och de ettåriga dödligehetsannolikheterna och givet dessa simulera utjämningsfonden under en längre tidsperiod. I ett första skede begränsar jag mig till modellen

$$F(t) = \alpha W(t) - \gamma B(t)$$

där varje individ i åldersintervallet (t_y, t_w) betalar in α enheter per år och de i (t_w, t_p) erhåller γ enheter per år.

För att skatta födelse– och dödssannolikheterna behövs tidsserier över befolkningen men i avsaknad av dessa har jag använt mig av Statistisk årsboks tabeller.

4.1. De ettåriga födelsesannolikheterna

Som skattning av de ettåriga födelsesannolikheterna har jag tagit proportionen levande födda enligt tabell **Födelsetal och reproduktionstal** i Statistisk årsbok 1995. En graf över dessa mellan 1970 och 1993 ges av figur 4.1(○).

Eftersom svängningar i födelsesannolikheterna ger de största påfrestningarna på ett pensionssystem har vi valt att anpassa en periodisk funktion till dessa sannolikheter. En lämplig sådana befanns vara

$$\beta(t) = 0.0126 + 0.002 \cos\left(\frac{2.6\pi}{26} \times t - 0.6\right)$$

och denna funktions graf ges av den obrutna linjen i figur 4.1.

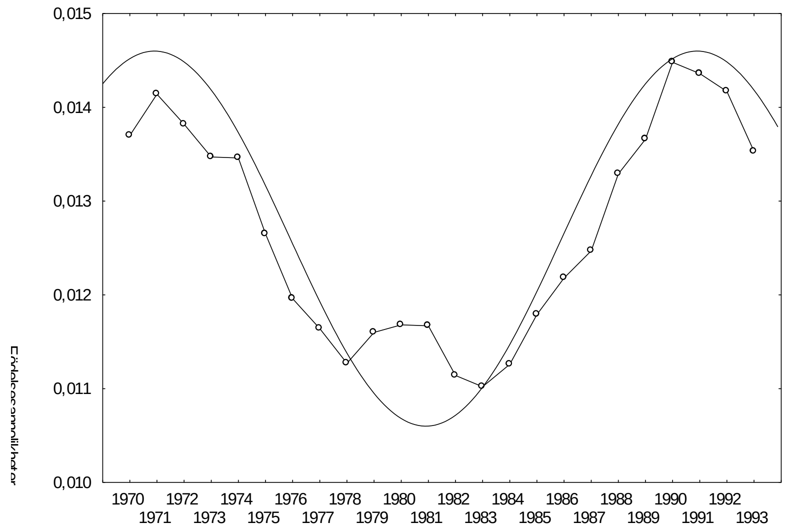


Figure 4.1: Observerade och skattade födelsesannolikheter

4.2. De ettåriga dödlighetsannolikheterna

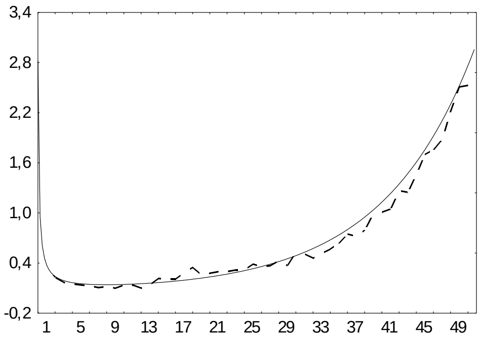
Befolkningspyramidens topp har blivit tjockare allteftersom den sociala och tekniska utvecklingen medfört en minskad dödlighetsintensitet. Eftersom kvinnor har en lägre dödlighetsintensitet än män och därför ger större påfrestningar på ett allmänt pensionssystem skall vi använda oss av dödligheten för kvinnor på alla individer i pensionssystemet. Vissa tecken tyder på att dödlighetsintensiteten för kvinnor börjar plana ut och härav följer att dagens dödlighetsintensitet kan tänkas bestå under en längre period. Den kvinnliga dödlighetsintensiteten har tagits ur **Livslängdstabeller för perioden 1989–1993** i Statistisk årsbok 95 och till denna anpassades en funktion av typen

$$\mu(t) = \frac{e^{a+bt}}{(d+t)^c}$$

med resultatet

$$\mu(t) = \frac{e^{-0.99+0.109t}}{1000\,(0.1+t)^{0.88}}$$

De observerade värden ges av den streckade linjen och den skattade funktionen $\mu(t)$ av den heldragna linjen i figur 4.2.



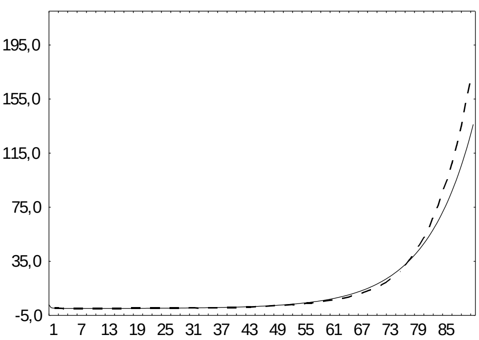


Figure 4.2: Dödlighetsintensiteten vid åldrarna $1-50$ respektive $1-90$ för år 1993

Ovanstående dödlighetsintensitet ger den ettåriga dödlighetssannolikheten till

$$q(x) = 1 - e^{-\frac{1}{1000}\int_x^{x+1} \frac{e^{-0.99+0.109t}}{(0.1+t)^{0.88}}\,dt}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

4.3. Dödlighetsvinst

En individ som uppnår pensionsåldern och har sparat α enheter per år har vid pensionens inträde sparat $t_y + \alpha\,(t_w - t_y)$ enheter. Till dessa tillkommer en dödlighetsvinst, V, per individ som beräknas på följande sätt:

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{\alpha} &= \frac{\sum_{i=t_y}^{t_w-1}(i-t_y+1)\left(N_k(i)-N_k(i+1)\right)}{N_k(t_w)} \\
&= \sum_{i=t_y}^{t_w-1}\frac{N_k(i)}{N_k(t_w)}-(t_w-t_y) \\
&= \sum_{i=t_y}^{t_w-1}\frac{N_k(0)\times P(T_0>i)}{N_k(0)\times P(T_0>t_w)}-(t_w-t_y) \\
&= \sum_{i=t_y}^{t_w-1}e^{\int_i^{t_w}\mu(y)\,dy}-(t_w-t_y)
\end{aligned}
$$

Example 4.1. *Om vi väljer* $t_y = 20$ *och* $t_w = 65$ *samt dödlighetsintensiteten ovan så erhålls att*

$$V = \alpha \times (49.4249 - 45) = 4.\,4249\alpha$$

och således kan varje individ till sin egen ihopsamlade pensionspoäng lägga ytterligare 4.4249 *enheter.*

4.4. Simulering av utjämningsfonden

Med hjälp av de så funna sannolikheterna och den demografiska modellen ovan kan jag nu simulera populationen framåt i tiden för att givet denna kunna räkna ut de framtida pensionskostnaderna. Vi betraktar utjämningsfondens storlek, $F(t)$, över tiden under antagandet att pensionen skall lyftas under

$$E(T(t_w)) = \int_{t_w}^{\infty} e^{-\int_{t_w}^{t}\mu(s)\,ds}\,dt$$

år, att alla sparat α enheter per år samt att sparat belopp tas ut jämnt över pensionstiden och har därvid att fonden varierar enligt

$$F(t) = \alpha W(t) - \frac{t_y + (\alpha-1)\times(t_w-t_y)+\sum_{i=t_y}^{t_w-1}e^{\int_i^{t_w}\mu(y)\,dy}}{E(T(t_w))}B(t)$$

Example 4.2. *Välj*

$$\begin{aligned}\alpha &= 1\\ t_y &= 20\\ t_w &= 65\\ t_p &= 110\\ \mu(t) &= \frac{1}{1000}\frac{e^{-0.99+0.109t}}{(0.1+t)^{0.88}}\end{aligned}$$

Då erhålls först att den förväntade återstående livslängden är

$$\begin{aligned}E(T(t_w)) &= \int_{65}^{110} e^{-\int_{65}^{t}\frac{1}{1000}\frac{e^{-0.99+0.109s}}{(0.1+s)^{0.88}}ds}dt\\ &= 19.5457\end{aligned}$$

och detta ger fondutveckling enligt figur 4.3.

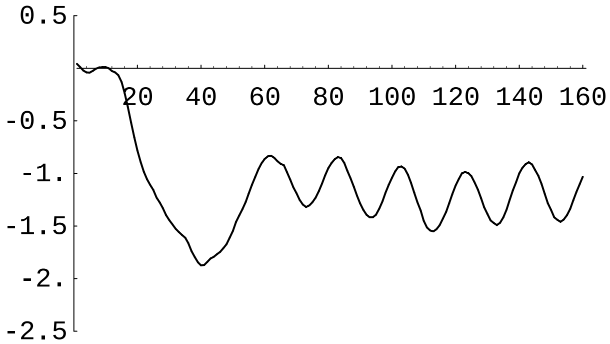


Figure 4.3: Fondutvecklingen under 160 år när 1 enhet betalas per år och yrkesverksam

Example 4.3. *Här tänker vi oss att de yrkesverksamma per år sparar enligt schemat*

$$\begin{aligned}\alpha &= 1\\ t_y &= 20\\ t_w &= 65\\ t_p &= 110\\ \mu(y) &= \frac{1}{1000}\frac{e^{-0.99+0.109t}}{(0.1+t)^{0.88}}\end{aligned}$$

men att uttag till pensionärerna görs som om de hade sparat 2 *enheter per år. Nu erhålls fondutvecklingen enligt figur 4.4.*

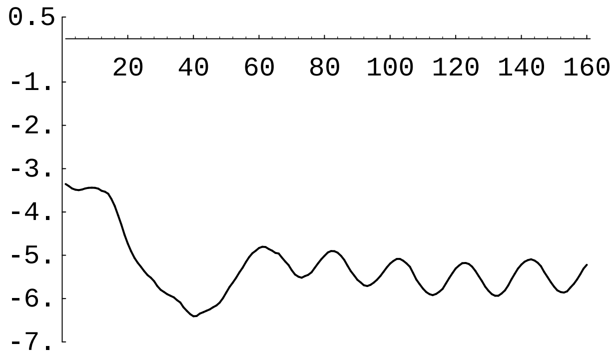


Figure 4.4: Fondutvecklingen under 160 år när 2 enheter betalas per år och yrkesverksam

Vi ser att i det första fallet behöver vi en utjämningsfond om ca 1.7 miljoner enheter och i det andra fallet behövs ca 6.5 miljoner enheter.

5. Slutsatser och framtida arbete